Analyse 17-10-'02

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw de functie f gedefineerd op $\mathbb{R}^2$ door

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2xy^2 .$$

1. Bepaal de stationaire punten van f en hun aard: lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt.

2. Zou een van de stationaire punten een absoluut maximum of minimum kunnen zijn ?

II

Beschouw een functie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Wat wordt bedoeld met de uitspraak: f is differentieerbaar in het punt (a,b) ?

2. Geef een eenvoudig kenmerk voor differentieerbaarheid in termen van partiële afgeleiden.

3. Bewijs dat een functie $(x,y) \mapsto e^{ax^2+by}P(x,y)$, met P een polynoom, $a,b \in \mathbb{R}$, differentieerbaar is.

4. Beschouw een continu differentieerbare functie f op $\mathbb{R}^2$ die in poolcoördinaten de uitdrukking $f(x,y) = F(r,\theta) = F(r)$ heeft, onafhankelijk van θ, een radiale functie dus. Toon aan dat

$$(1) \qquad y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

5. Toon omgekeerd aan dat een continu differentieerbare functie f op $\mathbb{R}^2$ die voldoet aan (1) een radiale functie is.

Aanwijzing: Stel $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en toon aan dat $\dfrac{\partial F}{\partial\theta} = 0$.

III

1. Formuleer de stelling over de transformatie van dubbele integralen in poolcoördinaten. Beschouw de integraal, gedefinieerd voor $R > 0$:

$$I(R) = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-x^2}e^{-y^2}dy$$

2. Beschrijf het integratiegebied: i) in Cartesische coördinaten, ii) in poolcoördinaten.

3. Bereken de integraal $I(R)$ en $\lim\limits_{R\to\infty} I(R)$.

IV

1. Formuleer de stelling over de multiplicatoren van Lagrange.

2. Toon aan dat de functie $f(x,y,z) = 2x - 2y + z$ een maximum en een minimum heeft op de sfeer $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$.

3. Bepaal het maximum en het minimum van de functie f op S en de punten waar deze worden aangenomen.

[1]De onderdelen I, II, III en IV zijn onafhankelijk.